סוגי קוהרנטיות

- ראינו שיש סוגי קוהרנטיות שונים, התלויים בסוג מקורות האור השונים.
- נגדיר קוהרנטיות כמִתאם בין שני גלים שונים במקומות שונים במרחב ובזמנים שונים.
- קוהרנטיות מאפשרת להעריך מתוך אחד הגלים את השני במקום אחר ובזמן אחר.
- נגדיר שני מקרים קיצוניים:

קוהרנטיות זמנית, שבה משוים את הקוהרנטיות בין שני גלים באותו מקום אך בזמנים שונים.
נוכל להגדיר זמן קוהרנטיות τ_c שבתוכו מתקיים המִתאם בין הגלים.
כבר ראינו שזמן קוהרנטיות זה תלוי הדוקות ברוחב הפס של גל האור.

קוהרנטיות מרחבית, שבה משוים את הקוהרנטיות של שני גלים במקומות שונים באותו זמן.
כאן נגדיר בצורה דומה תחום קוהרנטיות שבתוכו מתקיים המִתאם בין הגלים.
תחום זה אינו בהכרח כדורי.

פונקצית הקוהרנטיות ההדדית

- נגדיר את פונקצית הקוהרנטיות ההדדית (mutual coherence function):

פונקצית הקוהרנטיות ההדדית היא המִתאם בין שני גלים שונים במקומות שונים במרחב ובזמנים שונים.

- אנו משווים שני זמנים סמוכים, t ו- $t+\tau$, ומניחים סטציונריות (stationarity) בזמן:

פונקצית הקוהרנטיות ההדדית היא אותה פונקציה, ללא תלות מתי מתבצעת המדידה.

- מגדירים את פונקצית הקוהרנטיות ההדדית המרוכבת:

$$\Gamma\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau\right)\equiv\left\langle f\left(\mathbf{r}_1,t\right)f^*\left(\mathbf{r}_2,t+\tau\right)\right\rangle$$

- בגלל הנחת הסטציונריות (אין תלות בזמן המדידה) מקבלים את דרגת הקוהרנטיות ההדדית המנורמלת:

$$\gamma\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau\right)\equiv\frac{\Gamma\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,0\right)\Gamma\left(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,0\right)}}\equiv\frac{\Gamma\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\tau\right)}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

- I_1 הוא העוצמה הממוצעת בנקודה $\mathbf{r}_1$, ובהתאמה I_2 הוא העוצמה הממוצעת בנקודה $\mathbf{r}_2$:

$$I_1\equiv\left\langle f\left(\mathbf{r}_1,t\right)f^*\left(\mathbf{r}_1,t+\tau\right)\right\rangle;\ I_2\equiv\left\langle f\left(\mathbf{r}_2,t\right)f^*\left(\mathbf{r}_2,t+\tau\right)\right\rangle$$

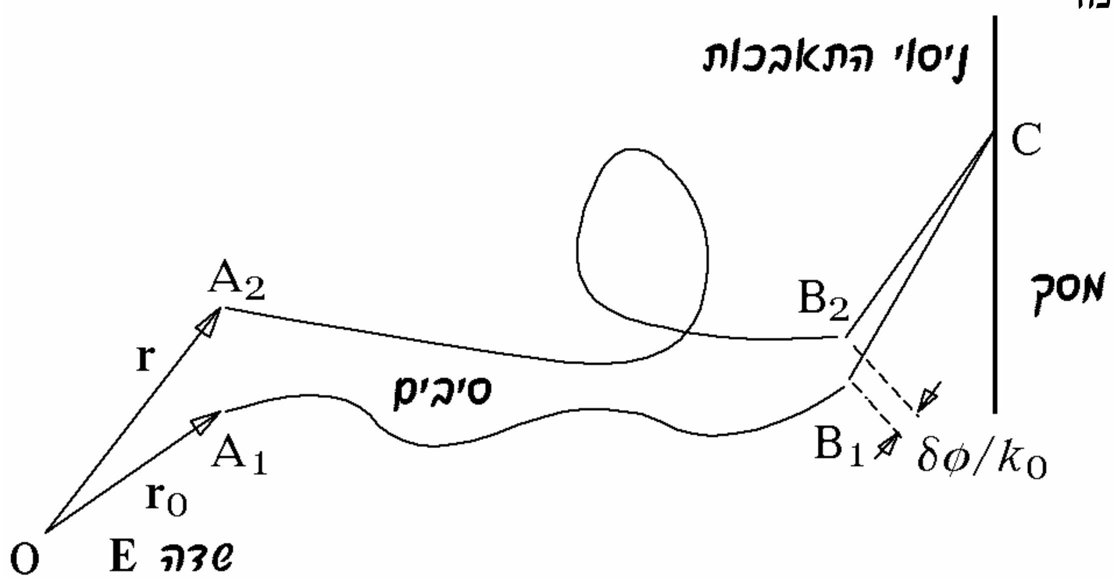
הסטטוסקופ האופטי

- ניתן למדוד את הפונקציות על ידי gedanken experiment, לו אנו קוראים *סטטוסקופ אופטי*. את המכשיר ניתן לממש באמצעות ספקטרוסקופית פוריה ואינטרפרומטר כוכבי של מייכלסון.
- מקור O פולט שדה E שבו אנחנו ממקמים את הקצוות של שני סיבים אופטיים A_1B_1 ו-A_2B_2.
- A_1 נמצא ב- $\mathbf{r}_0$ ו- A_2 ב-$\mathbf{r}$.
- הפרש אורך הסיבים הינו $c\tau$, כך שהאור היוצא מ-B_1 מייצג את השדה $E(\mathbf{r}_0, t_0)$ והאור היוצא מ-B_2 מייצג את השדה $E(\mathbf{r}_0, t_0 - \tau)$.
- אנו מבצעים ניסוי התאבכות בין המקורות B_1 ו-B_2. בנקודה C על המסך נוצר (גיאומטרית) הפרש מופע $\varphi(C)$ בין הגלים מהמקורות B_1 ו-B_2, כלומר

$$\phi = k_0\left(B_2C - B_1C\right)$$

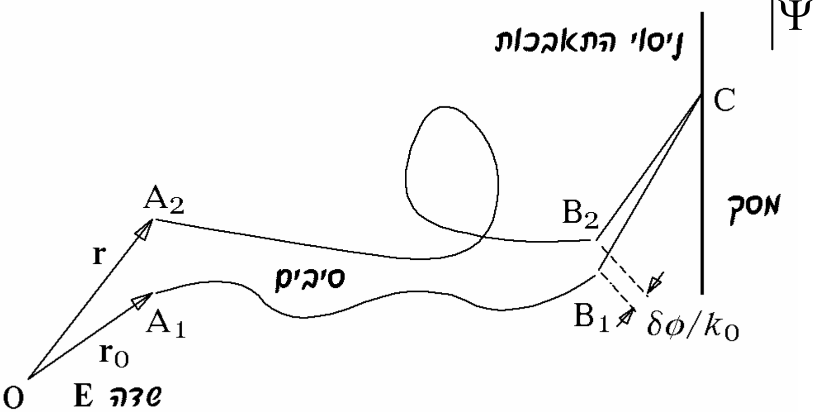
- השדה בנקודה C על המסך הוא

$$\Psi(C) = E(B_2) + E(B_1)\mathrm{e}^{i\phi}$$



התאבכות שני שדות

- קיבלנו שהשדה הוא $\Psi(C)=E(B_2)+E(B_1)\mathrm{e}^{i\phi}$
- אנו רוצים לחשב את העוצמה הכרוכה בכך. נסמן את השדות באופן כללי E_1 ו- E_2 ונחשב את ריבועם



$$
\begin{aligned}
\left|\Psi(C)\right|^2 &= \left|\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2\right|^2=\left[\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2\right]\left[\mathbf{E}_1{}^*+\mathbf{E}_2{}^*\right]\\
&= \mathbf{E}_1\mathbf{E}_1{}^*+\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2{}^*+\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2{}^*+\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1{}^*\\
&= \left|\mathbf{E}_1\right|^2+\left|\mathbf{E}_2\right|^2+\left|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2{}^*\right|\mathrm{e}^{ia}+\left|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2{}^*\right|\mathrm{e}^{-ia}\\
&= \left|\mathbf{E}_1\right|^2+\left|\mathbf{E}_2\right|^2+2\left|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2{}^*\right|\cos\alpha\\
&= I_1{}^2+I_2{}^2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\alpha
\end{aligned}
$$

- כאשר $\mathrm{tg}\,\alpha=\arg\{E_1E_2^*\}$ היא הזוית בין השדות, ובשלב האחרון גם מיצענו על זמן ארוך.
- במקרה זה נוספת לזוית בין השדות E_1 ו- E_2 גם זוית הפרש המסלולים האופטיים $\alpha=\Delta+\varphi$ ומקבלים

$$
\begin{aligned}
\left|\Psi(C)\right|^2 &= \left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t_0-\tau)\right|^2+2\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t_0-\tau)\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0,t_0)\right|\cos(\phi+\Delta)+\left|\mathbf{E}(\mathbf{r}_0,t_0)\right|^2\\
&= \left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t_0-\tau)\right|^2+\left|\mathbf{E}(\mathbf{r}_0,t_0)\right|^2+2\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t_0-\tau)\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0,t_0)\right|\cos(\phi+\Delta)
\end{aligned}
$$

קוהרנטיות בין שני שדות

- נמצע בזמן ונקבל

$$\left\langle \left|\Psi(C)\right|^2 \right\rangle = \left\langle \left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t_0-\tau)\right|^2 + \left|\mathbf{E}(\mathbf{r}_0,t_0)\right|^2 + 2\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t_0-\tau)\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0,t_0)\right|\cos(\phi+\Delta) \right\rangle$$

$$= I(\mathbf{r},t_0-\tau) + I(\mathbf{r}_0,t_0) + 2\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,\tau)\cos(\phi+\Delta)$$

- אם העוצמות של שני השדות שוות בממוצע, ניתן לכתוב

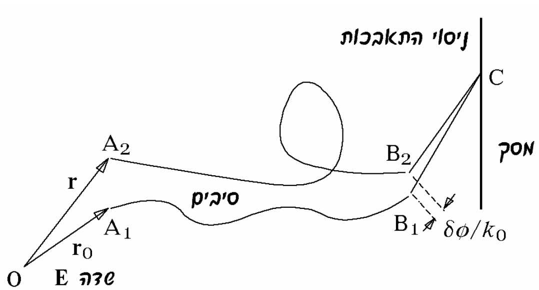
$$I(C) = 2I\left[1 + 2\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,\tau)\cos(\phi+\Delta)\right]$$

- העוצמה המרבית (פס התאבכות בהיר) היא כאשר $\cos(\Delta+\varphi)=1$ שאז

$$I_{\max} = 2\left[1 + \left|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,\tau)\right|\right]$$

- העוצמה המזערית (פס התאבכות כהה) היא כאשר $\cos(\Delta+\varphi)=-1$ שאז

$$I_{\min} = 2\left[1 - \left|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,\tau)\right|\right]$$



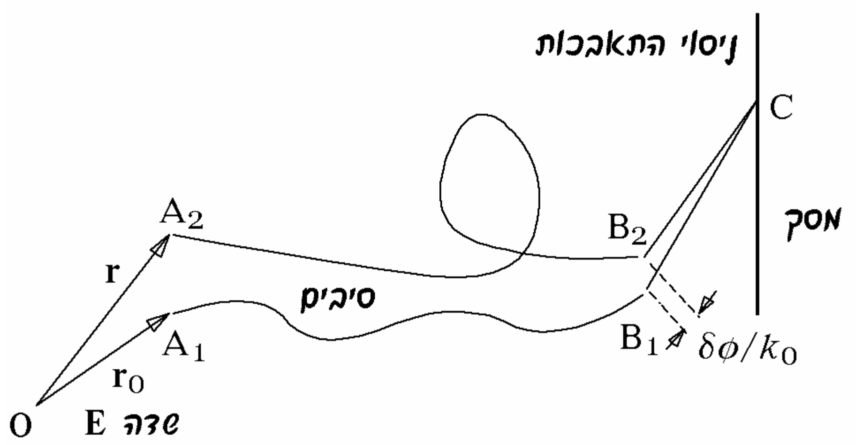
- מתוך שתי עוצמות אלו מגדירים את הניגוד (visibility או contrast):

$$V = \frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} = \left|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,\tau)\right|$$

ניגוד הפסים

- קיבלנו את הניגוד של פסי ההתאבכות בין הנקודות המקוריות ובזמני מדידה שונים

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \gamma\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \tau\right) \right|$$



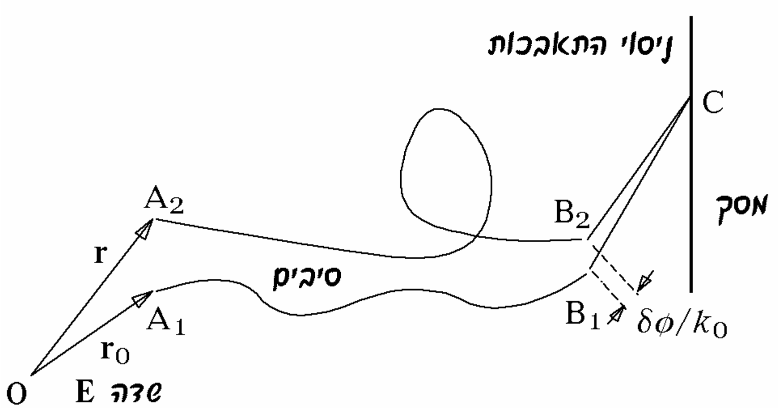
- לכן מדידת הניגוד נותנת את פונקצית הקוהרנטיות γ.
- מיקום הפסים הכהים והבהירים נותן את הזוית בין השדות Δ.
- קיימים יישומים פיסיקליים יותר של הסטטוסקופ האופטי ששניהם נהגו על ידי מייכלסון:

  ספקטרומטר התמרת פוריה (למדידת ספקטרום באמצעות קוהרנטיות)

  אינטרפרומטר הכוכבים של מייכלסון (למדידת גודל כוכבים באמצעות קוהרנטיות).

משפט וינר-חינצ'ין

- ניקח את המקרה הפרטי שבו שתי המדידות מבוצעות באותה נקודה, $A_1 = A_2$, ואז רק הזמנים שונים בין שני הגלים. במקרה זה אנו מודדים רק את הקוהרנטיות הזמנית של האות,



$$\Gamma(\tau) = \left\langle \mathbf{E}(t)\mathbf{E}^*(t-\tau) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}(t)\mathbf{E}^*(t-\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\mathbf{E}(t)\otimes\mathbf{E}^*(-t)$$

- כאשר המיצוע נעשה למשך פרק זמן T. לכן ההתמרה היא

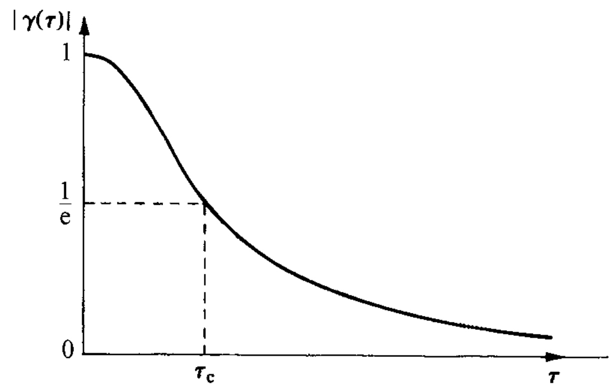
$$\tilde{\Gamma}(\omega) = e(\omega)\cdot e^*(\omega) = \left|e(\omega)\right|^2 = I(\omega)$$

- זוהי העוצמה הספקטרלית (או הספקטרום, מנעד) של מקור האור.
- לכן, מדידת $\gamma(\tau)$ והפיכתה על ידי התמרת פוריה נותנת את הספקטרום.
- זוהי שיטת ספקטרוסקופית פוריה.
- החישוב שערכנו נקרא משפט וינר - חינצ'ין (Wiener - Khinchine)

עוצמה ספקטרלית היא התמרת פוריה של פונקצית קורלציה.

קוהרנטיות זמנית

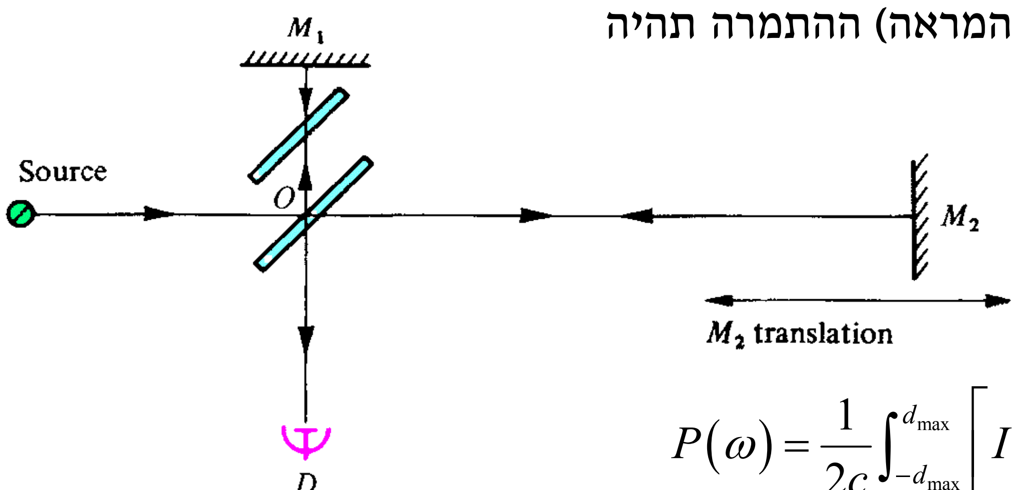
- בגלל הקשר הפשוט בין דרגת הקוהרנטיות הזמנית ובין תיאור הספקטרום של מקור האור, נעשה בה שימוש נרחב.
- פונקציה זו ערכה 1 עבור הפרש זמנים 0, והיא יורדת ככל שגדל הפרש הזמנים בין שתי המדידות.
- זמן הקוהרנטיות τ_c יהיה הזמן שבו יורדת $\gamma(\tau)$ לערך 1/e.
- בדוגמה שראינו עבור חבילות גלים גאוסיות, יהיה זמן הקוהרנטיות $\tau_c = 2\sigma$.
- בגלל קשר פוריה בין הקוהרנטיות והספקטרום, גם הספקטרום יהיה גאוסי.



פונקצית הקוהרנטיות הזמנית של מקור צר סרט

ספקטרוסקופית פוריה

- הרעיון הוצע על ידי מייכלסון כבר בשנת 1898, אבל הביצוע היה קשה. כיום הגלאים רגישים יותר, האופטיקה יעילה יותר, והכי חשוב, קיימים מחשבים המאפשרים התמרות פוריה מהירות לקבלת הספקטרום מפונקציה הקוהרנטיות.
- ביישום המכשיר היום משתמשים באינטרפרומטר מייכלסון רגיל ומזיזים את אחת המראות בצורה משמעותית.
- מקבלים פסי התאבכות עגולים (שני דמויות המקורות אחת מאחורי השניה).
- אם ההפרש בין הקרנים הוא d (פעמיים תזוזת המראה) ההתמרה תהיה



$$P(\omega)=\frac{1}{2c}\int_{-d_{\max}}^{d_{\max}}\left[I-I_M\left(\frac{d}{c}\right)\right]\exp-\frac{i\omega d}{c}\,\mathrm{d}d$$

- כאשר I היא העוצמה הממוצעת, ו-I_{M} היא העוצמה בנקודה d.

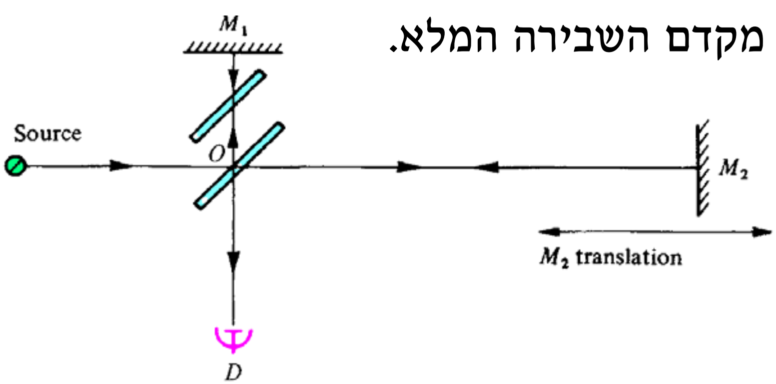
ספקטרום הגל

- בגלל הסימטריה בספקטרום, אין צורך למדוד אותו משני עברי נקודת האפס.
- כמו כן, עוברים מתדר לוקטור גל, לפי $\omega = k\,c > 0$ ומקבלים

$$P(k) = \frac{1}{c}\int_0^{d_{\max}} \left[I - I_M\left(\frac{d}{c}\right) \right] \cos(kd)\, \mathrm{d}\, d$$

- בגלל הסיום החד של האינטגרל בהזזה המירבית, מקבלים פונקצית חלון שהתמרתה מתנדנדת.
- הפתרון הוא על ידי החלשה מכוונת של המדידה בקצה המסלול, לעיגול החלון והחלקת ההתמרה.

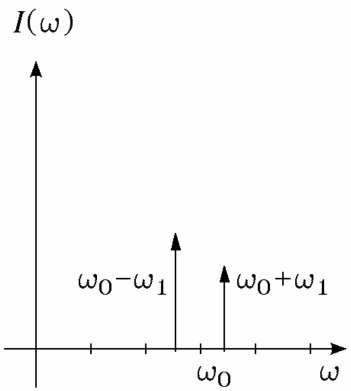
- אם מכניסים חומר בעל מקדם שבירה לא ידוע $\mu(\omega)$, אזי פונקצית הקוהרנטיות לא תהיה סימטרית.
- ההתמרה של פונקציה ממשית לא סימטרית היא מרוכבת.
- מתוך החלק הממשי והמדומה של הספקטרום ניתן לחשב את מקדם השבירה המלא.

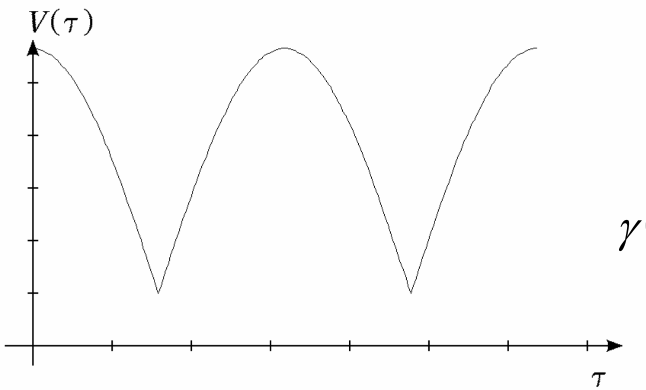


ספקטרום פשוט

- ניתן ספקטרום בצורת doublet

$$I(\omega)=\tfrac{1}{2}\delta(\omega_0-\omega_1)+\tfrac{1}{2}\delta(\omega_0+\omega_1)$$





- התדרים מקיימים $\omega_0 >> \omega_1$.
- פונקצית הקוהרנטיות היא

$$\gamma(\tau)=F.T.\{I(\omega)\}=\cos(\omega_1\tau)\cdot \mathrm{e}^{i\omega_0\tau}$$

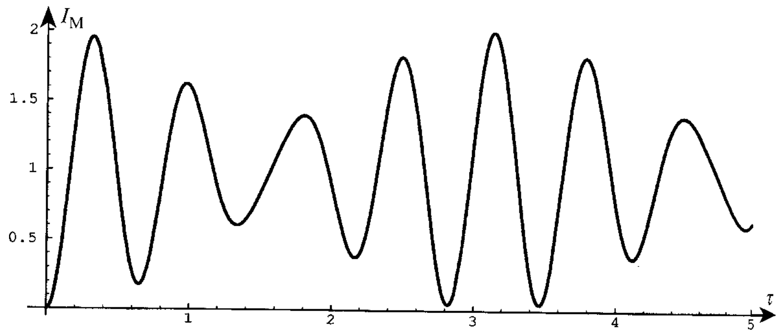
- ניגוד פסי ההתאבכות יהיה

$$V(\tau)=|\gamma(\tau)|=|\cos(\omega_1\tau)|$$

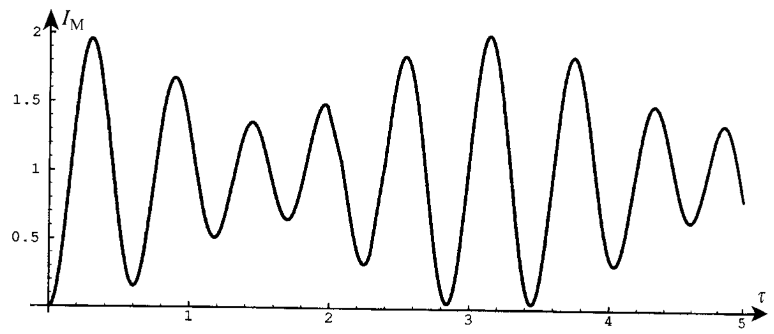
- אם שני המרכיבים בעלי עוצמות שונות, הערך המזערי של הניגוד אינו אפס.
- בדיקת הניגוד בלבד לא יכולה לגלות לנו גם איזה משני המרכיבים הינו הגדול יותר.
- ספקטרומטר פוריה מודד את החלק הממשי של פונקצית הקוהרנטיות, לא את ערכה המוחלט.
- לקבלת הפונקציה כולה יש למדוד אותה במלואה.

דוגמה לספקטרום סינתטי

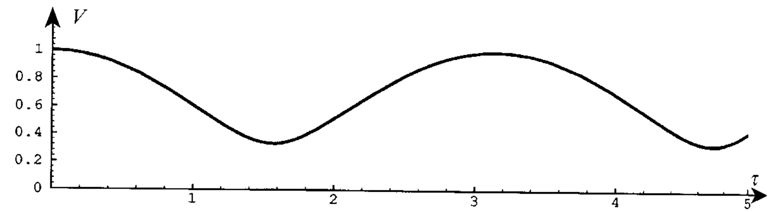
- שני ספקטרה של doublet בעלי אותה פונקצית ניגוד



$$\cos 9t + \sqrt{2}\cos 11t$$

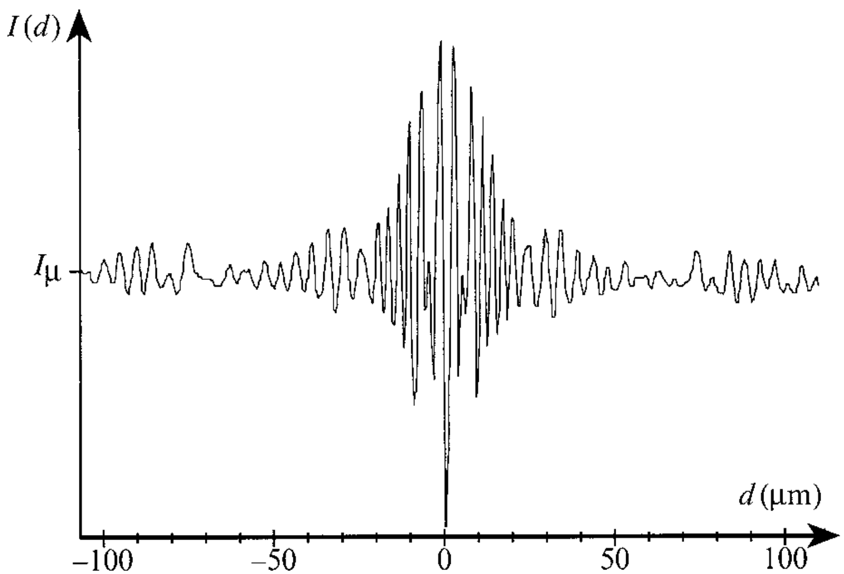


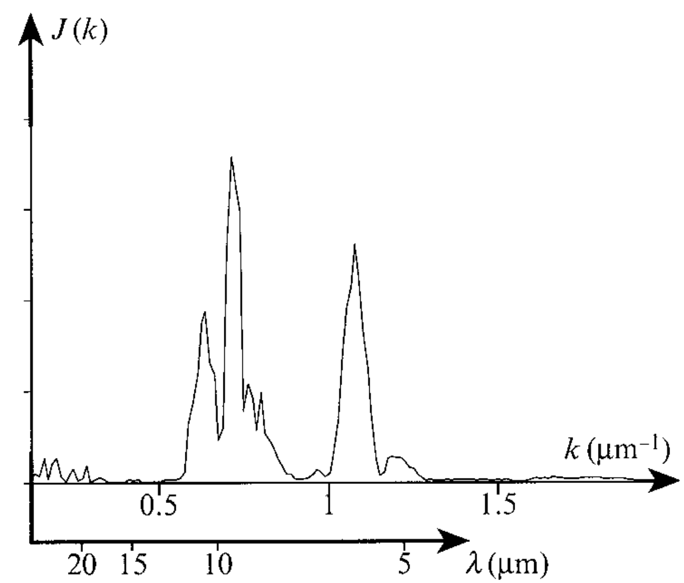
$$\sqrt{2}\cos 9t + \cos 11t$$



דוגמה לספקטרום מדוד

- ספקטרום של מקור אינפרה-אדום שנמדד אוטומטית באינטרפרומטר מייכלסון.
- כיון שלא מצליחים לקבל סימטריה מושלמת בין הצדדים, מסתבר שהגדרת נקודת האפס היתה שגויה.
- על ידי חישוב פשוט ניתן לתקן את ערך האפס ולקבל את הספקטרום.





כושר הפרדה ורגישות

- אם התנועה המירבית של המראה, $d_{\max}$, אינה מאפשרת יותר ממחצית פס התאבכות, לא נוכל לגלות את התדר המתאים.
- נניח שהשינוי בפס ההתאבכות הוא

$$\omega\tau_{\max} = \omega d_{\max} / c > 2\pi$$

- התדר המקיים תנאי זה הוא

$$\omega_{\min} = 2\pi c / d_{\max}$$

- במונחים של וקטור גל

$$\delta k = \omega_{\min} / c = 2\pi / d_{\max}$$

- אם וקטור הגל המרכזי הוא k_0 אזי כוח ההפרדה הוא

$$\frac{k_0}{\delta k} = \frac{d_{\max}}{\lambda_0}$$

- כמו בסריג עקיפה, כך גם כאן האורך הכולל של הסריג קובע את ההפרדה המירבית.
- לספקטרומטר פוריה יתרון על סריג עקיפה או מנסרה בשני מובנים, יתרון פֶּלגֶט ויתרון זַ'קינוֹ.
- יתרון פלגט הוא שבכל רגע נמדד חצי מהאור, מה שעדיף כשקרינת הרקע חזקה (באינפרה-אדום).
- יתרון ז'קינו הוא שכמות האור הנכנסת לספקטרומטר גדולה בהרבה משל סריג או מנסרה.